Аномальная доходность как индикатор неправомерного использования инсайдерской информации и получение аналитической формы нелинейного коэффициента бета в CAMP-модели

Понимаш Захар Алексеевич
соискатель, Институт радиотехнических систем и управления ЮФУ, ponimashz@mail.ru

Потанина Алена Романовна
Бакалавр, РАНХиГС при Президенте РФ

В работе рассматривается проблема нелинейности коэффициента бета в модели оценки капитальных активов (CAPM). Классическая CAPM трактует бету как постоянный коэффициент пропорциональности, однако накопленная эмпирическая база свидетельствует о ее зависимости от величины рыночной доходности. На основе результатов исследования, в котором нелинейная бета оценивается искусственной нейронной сетью, предложен метод символьной регрессии, восстанавливающий функцию ожидаемой доходности h(x) и производную от нее бету β(x) = h′(x) в компактной аналитической форме. Метод объединяет ядерное сглаживание Надарая—Уотсона на равномерной сетке, сеть Колмогорова—Арнольда для начального приближения, упрощение больши́ми языковыми моделями и генетическую символьную регрессию с отбором по Парето-фронту «точность/сложность». На синтетических данных, воспроизводящих условия портфеля малой капитализации (Small), метод восстановил U-образную нелинейную бету трехпараметрической формулой $h(x) = 1{,}877x - 0{,}481 \cdot \sin(1{,}042x)$: среднее значение бета 1,875 (эталон 1,859), выпуклость 1,002 (эталон 1,032). По сравнению с полиномиальной регрессией, нейронной сетью и классической символьной регрессии на базе генетических алгоритмов, предложенный метод обеспечивает сопоставимую точность при минимальном числе параметров и сохранении экономической интерпретируемости результата. Показано правовое применение результата: восстановленная функция нормальной доходности служит основой событийного анализа при выявлении неправомерного использования инсайдерской информации, а компактная аналитическая форма беты повышает достоверность контрфактического расчета излишнего дохода, предусмотренного статьей 15.21 КоАП РФ и статьей 185.6 УК РФ.

Ключевые слова: CAPM, нелинейная бета, символьная регрессия, машинное обучение, интерпретируемость, выпуклость беты, компактность формулы, портфель малой капитализации, регрессия Надарая—Уотсона, премия за риск, инсайдерская торговля, аномальная доходность, событийный анализ, контрфактический доход.

Модель оценки капитальных активов занимает важное место в современной теории финансов и по сей день остается одним из наиболее широко применяемых инструментов для оценки требуемой доходности активов и управления инвестиционным риском. Модель была независимо разработана в 1960-е годы Джеком Трейнором, Уильямом Шарпом [1], Джоном Линтнером [2] и Яном Моссином [3] на основе более ранних работ Гарри Марковица о диверсификации и современной портфельной теории [4]. Она заложила фундамент количественного подхода к соотношению риска и доходности на финансовых рынках [5].

В своей классической постановке CAPM устанавливает линейную зависимость между ожидаемой доходностью актива и его систематическим рыночным риском, измеряемым коэффициентом β:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f) \quad (1)$$

где $E(R_i)$ — ожидаемая доходность актива i, R_f — безрисковая ставка доходности, $E(R_m)$ — ожидаемая доходность рыночного портфеля, $(E(R_m) - R_f)$ — рыночная премия за риск. Коэффициент β_i при этом определяется как:

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_m)}{\sigma^2(R_m)} \quad (2)$$

то есть представляет собой отношение ковариации доходности актива с доходностью рыночного портфеля к дисперсии рыночной доходности.

Обычно в качестве безрисковой ставки используют доходность государственных облигаций (в России — доходность облигаций федерального займа, ОФЗ), поскольку вероятность дефолта у государства крайне мала.

Ключевым допущением классической модели является трактовка β как постоянного коэффициента пропорциональности, линейно связывающего доходность актива с рыночной премией за риск:

$$E(R_i) - R_f = \beta_i(E(R_m) - R_f) \quad (3)$$

Вместе с тем накопленная эмпирическая база свидетельствует о существенных ограничениях классической модели. Одним из наиболее значимых направлений критики является вопрос о природе самого коэффициента β: является ли он в действительности постоянной величиной, линейно описывающей чувствительность актива к рыночным движениям, или же представляет собой более сложную, нелинейную функцию рыночной доходности. Этот вопрос тесно связан с концепцией условной модели CAPM, в рамках которой коэффициент бета рассматривается не как константа, а как величина, зависящая от информационного состояния рынка и меняющаяся во времени [6].

В статье [7] авторы заменяют простую линейную зависимость β нелинейной функцией рыночной доходности H с учетом текущего и $L = 20$ запаздывающих значений избыточной рыночной доходности $MktRF = R_m - R_f$ (превышения доходности рынка над безрисковой ставкой):

$$MktRF = R_m - R_f \quad (4)$$

$$R_{i,t} - R_{f,t} = H(MktRF_t) + \varepsilon_{i,t} \quad (5)$$

Нелинейная бета определяется как сумма частных производных H по текущему и всем запаздывающим значениям рыночной доходности; она была получена авторами через решение задачи регрессии с использованием нейронной сети.

Обозначим через $x \cdot \mathbf{1}$ вектор, все компоненты которого равны текущему значению $x = \mathrm{MktRF}$ (текущий и лаговые входы совпадают). Сечение H вдоль этого направления есть одномерная функция $h(x) \equiv H(x \cdot \mathbf{1})$, где H — функция вектора признаков (текущее и запаздывающие значения MktRF), а h — ее одномерное сечение (далее используется h).

Именно она изображается на рисунке 1 статьи [7] как зависимость ожидаемой доходности портфеля от рыночной. Сама функция была впоследствии выражена авторами через ее одномерное сечение (6):

$h(x) = a \cdot x + c \cdot \sigma(b \cdot x) + d$ (6)

где $\sigma(x)$ — сигмоидальная (логистическая) функция:

$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ (7)

Одной из существенных проблем такого подхода является низкая интерпретируемость результата: напрямую интерпретировать веса нейронной сети довольно сложно.

Акции малой капитализации и стоимостные акции демонстрируют U-образную форму коэффициента бета с высокими значениями выпуклости (1,032 и 0,336 соответственно). Это означает, что при значительных рыночных движениях, как в сторону роста, так и падения, чувствительность доходности к рынку резко возрастает. Для портфеля Small бета увеличивается с 1,2 при малых колебаниях рынка до 2,24 при сильных движениях. Авторы интерпретируют данный эффект как свидетельство повышенной подверженности этих активов хвостовым рискам и шокам-скачкам, а не обычным диффузным рискам. Дополнительно для портфеля Small зафиксирована значительная задержка реакции беты (1,075), объясняемая снижением ликвидности после сильных рыночных потрясений.

Акции крупной капитализации и акции роста характеризуются плоской формой беты (выпуклость −0,011 и −0,072), что указывает на равномерную чувствительность к рыночным движениям любой амплитуды.

Цель эксперимента, поставленного в настоящей статье, заключается в восстановлении функции $h(x)$ и нелинейной беты $\beta(x)$ для портфеля Small (акции малой капитализации), поскольку, согласно статье [7], именно у данного портфеля бета наиболее нелинейна и U-образна. Стоимостные акции (Value) демонстрируют качественно ту же U-образную нелинейность, однако именно для портфеля Small эффект выражен наиболее сильно (наибольшие средняя бета, выпуклость и задержка беты), поэтому для демонстрации метода достаточно одного, наиболее показательного портфеля. Также требуется выразить $h(x)$ и $\beta(x)$ в компактном аналитическом виде, так как именно такое представление обеспечивает наилучшую интерпретируемость результата. Сначала необходимо получить аналитический вид $h(x)$, после чего $\beta(x)$ получается тривиально как $\beta(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}$. В качестве эталона взято выражение (6).

Практическая часть

Для решения поставленной задачи рассматривались такие алгоритмы, как SINDy [10] и KAN [11]. Однако оба подхода дают слишком громоздкие формулы а также, в SINDy было выявлено существенное падение качества при наличии шума. Частично проблема была решена введением непараметрической регрессии [12, 13]. Также упрощение выражений было переложено на большие языковые модели (LLM).

Классический подход к символьной регрессии, реализованный, например, в библиотеке gplearn, создает избыточные по сложности формулы. [14-15]

Предложенный метод использует для формирования начального приближения KAN с упрощением через LLM и последующую символьную регрессию, после чего строится Парето-фронт решений, которые повторно упрощаются LLM.

Данные были сгенерированы с учетом условий, обозначенных в статье [7]. Признак $x = \mathrm{MktRF}$ (рыночная доходность, %) получен с тяжелыми хвостами (распределение Стьюдента с числом степеней свободы 4); межперцентильный диапазон $[P_1, P_{99}] \approx [-3\,\%,\ 3\,\%]$. Отклик $y = h(x) + \varepsilon$, где ε — шум со средним квадратическим отклонением $\sigma \approx 0{,}9\,\%$, согласованным с суммой квадратов остатков (SSR) портфеля Small из работы [7]. Объем выборки $n = 8000$, разбиение на обучающую и тестовую части — 75 / 25.

Точность оценивается коэффициентом детерминации:

$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST}$ (8)

При высоком штрафе за сложность метод возвращает $1{,}913 \cdot x$, то есть линейную CAPM ($\beta = \mathrm{const}$).

При ослаблении штрафа за сложность метод выделяет компактную нелинейную форму, которая воспроизводит U-образную бету и принимается в качестве итоговой:

$h(x) = 1{,}877 \cdot x - 0{,}481 \cdot \sin(1{,}042 \cdot x)$ (9)

$\beta(x) = h'(x) = 1{,}877 - 0{,}501 \cdot \cos(1{,}042 \cdot x)$ (10)

Оба члена выражения интерпретируемы: линейный $1{,}877 \cdot x$ выражает линейную чувствительность портфеля к рынку, а поправка $-0{,}481 \cdot \sin(1{,}042 \cdot x)$ — нелинейное усиление реакции при крупных движениях рынка, отражающее повышенную подверженность скачкообразным (хвостовым) рискам. Производная $\beta(x)$ имеет минимум в центре ($\beta \approx 1{,}38$ при $x = 0$) и максимумы в хвостах ($\beta \approx 2{,}38$), достигаемые при $\cos(1{,}042 \cdot x) = -1$, то есть при $x = \pm\frac{\pi}{1{,}042} \approx \pm 3{,}015\,\%$ на границе рабочего диапазона. Это и есть U-образная форма из статьи [7], а восстановленные характеристики: средняя бета 1,875 (цель 1,859) и выпуклость 1,002 (цель 1,032).

Таблица 1

Сравнение методов восстановления $h(x)$ (портфель Small)

Метод	Структура	$R^2_{тест}$	$R^2_э$	Сред. β	Вып.
Эталон (истинная h)	—	—	—	1,859	1,032
Линейная CAPM (МНК)	$a \cdot x + b$	0,787	0,982	1,673	0
Полином 3-й степени	$\sum_{k=0}^{3} a_k x^k$	0,798	0,995	1,737	0,775
Полином 5-й степени	$\sum_{k=0}^{5} a_k x^k$	0,800	0,999	1,895	1,302
Нейросеть (статья [7])	$ax + c\,S(bx + d)$	0,801	1,000	1,868	1,080
gplearn (GP-регрессия)	дерево из 59 узлов	0,799	0,996	1,746	0,655
Предложенный метод (символьная регрессия)	$ax - b\sin(cx)$	0,801	0,999	1,875	1,002

Все методы ограничены сверху уровнем $R^2_{тест} \approx 0{,}8$ (при $\sigma \approx 0{,}9\,\%$), поэтому различает их не $R^2_{тест}$, а близость к эталонной функции ($R^2_э$) и, главное, восстановление формы беты (выпуклости) при заданной компактности. Что показано на рисунке 1. Расхождение методов наблюдается только на хвостах распределения.

Компактность формулы, полученной предложенным методом, при сохранении точности и правильной формы беты отражена в таблице 2.

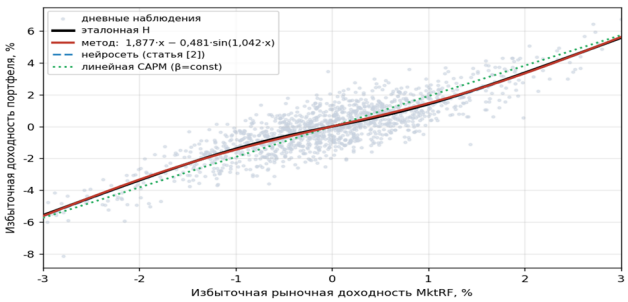

Рисунок 2. Функция ожидаемой доходности H(MktRF).

Таблица 2
Компактность и качество восстановления β

Показатель	Предложенный метод	Нейросеть [7]	gplearn	Полином 5
Число параметров	3	5	59	6
Выпуклость β	1,002	1,080	0,655	1,302
R_3^2	0,999	1,000	0,996	0,999
Аналитическая β(x)	да	нет (числ.)	нет	да

Аномальная доходность как индикатор инсайдерской торговли

Полученная компактная форма функции нормальной доходности имеет прямое правовое применение. Модель CAPM (1) задает ожидаемую (нормальную) доходность актива, а отклонение фактической доходности от предсказанной моделью называют аномальной (избыточной) доходностью. Ее правовое значение состоит в том, что она служит количественной мерой той части изменения цены, которая не объясняется общерыночными факторами и потому может быть следствием использования нераскрытой (инсайдерской) информации.

В российском праве порядок обращения инсайдерской информации и запрет манипулирования рынком установлены Федеральным законом от 27.07.2010 № 224-ФЗ [16]. Ответственность предусмотрена статьей 15.21 Кодекса Российской Федерации об административных правонарушениях [17] и статьей 185.6 Уголовного кодекса Российской Федерации [18]. Принципиально, что закон прямо предписывает построение контрфактической величины дохода: согласно примечанию 1 к статье 15.21 КоАП РФ [17], излишний доход определяется как «разница между доходом, который был получен в результате незаконных действий, и доходом, который сформировался бы без учета незаконных действий». Тем самым нормативное определение размера незаконного дохода совпадает по логике с эконометрическим понятием аномальной доходности, а выбор модели нормальной доходности приобретает юридически значимый характер: от него зависит и вывод об аномальности, и исчисляемый размер дохода, определяющий квалификацию деяния по статье 185.6 УК РФ [18].

Стандартным инструментом измерения аномальной доходности является событийный анализ (event study) [19, 20]. На окне оценки (обычно 120—250 торговых дней, предшествующих событию) оцениваются параметры рыночной модели нормальной доходности:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (11)$$

где $R_{i,t}$ — доходность актива i в день t; $R_{m,t}$ — доходность рынка; α_i, β_i — коэффициенты, оцениваемые на окне оценки; $\varepsilon_{i,t}$ — случайная составляющая. На окне события (несколько дней до и после раскрытия информации) аномальная доходность вычисляется как остаток относительно модельного прогноза:

$$AR_{i,t} = R_{i,t} - (\alpha_i + \beta_i R_{m,t}) \quad (12)$$

Суммарный эффект события измеряется накопленной аномальной доходностью за интервал (τ_1, τ_2):

$$CAR_i(\tau_1, \tau_2) = \sum_{t=\tau_1}^{\tau_2} AR_{i,t} \quad (13)$$

Статистическая значимость проверяется отношением накопленной аномальной доходности к ее стандартной ошибке (L — длина окна события в днях):

$$t = \frac{CAR_i}{\sigma_{AR} \cdot \sqrt{L}} \quad (14)$$

Требования к корректности процедуры: выбор окна, свойства распределения остатков, поправки на рост дисперсии в окне события и на неодновременность торгов систематизированы в работах [21, 22]; их соблюдение определяет допустимость и достоверность полученной оценки в качестве доказательства.

Эмпирическая литература устойчиво фиксирует аномальную доходность до публичного раскрытия информации. В работе [23] по выборке поглощаемых компаний показано наличие значимой избыточной доходности до первого объявления о слиянии, что авторы трактуют как свидетельство торговли на нераскрытой информации. В исследовании [24] на данных Комиссии по ценным бумагам и биржам США о фактически выявленных случаях незаконной инсайдерской торговли установлено, что в дни инсайдерских сделок наблюдается статистически значимая аномальная доходность, то есть рынок частично распознает информированную торговлю. В работе [25] выявлена аномальная активность на рынке опционов накануне объявлений о поглощениях. Совокупность признаков, используемых при проверке версии об инсайдерской торговле, включает статистически значимую положительную накопленную аномальную доходность за несколько дней до раскрытия, аномальный объем торгов, необычную активность в опционах с близкой датой исполнения и концентрацию сделок узкого круга лиц, имеющих доступ к информации согласно перечню инсайдеров [16].

Наиболее развитая практика применения событийного анализа сложилась в США. В деле Basic Inc. v. Levinson [26] сформулирована доктрина «обмана рынка» (fraud-on-the-market), сделавшая существенность информации предметом экономического доказывания; в деле Halliburton Co. v. Erica P. John Fund, Inc. [27] указано, что ответчику должна быть предоставлена возможность опровергнуть эту презумпцию доказательствами отсутствия влияния сведений на цену, — и основным инструментом такого доказывания служит событийный анализ; в деле Dura Pharmaceuticals, Inc. v. Broudo [28] установлено, что одного факта завышенной цены недостаточно и требуется доказать причинную связь с наступившими убытками. Практика применения методов финансовой экономики в делах о нарушениях на рынке ценных бумаг обобщена в работе [29]. В Российской Федерации функции по противодействию неправомерному использованию инсайдерской информации возложены на Банк России [16], а расчет излишнего дохода производится по правилу примечания 1 к статье 15.21 КоАП РФ [17].

Вместе с тем аномальная доходность является модельно зависимой величиной, что порождает ряд ограничений, существенных для доказывания: она определена лишь относительно принятой модели нормальной доходности, и ошибка спецификации проявляется как «аномалия», не связанная с противоправным поведением; в окне события возможны иные существенные обстоятельства, эффект которых неотделим от исследуемого; низкая ликвидность, неодновременность торгов и неопределенность точной даты события искажают оценку; перебор большого числа эмитентов и интервалов повышает вероятность случайного обнаружения «значимой» аномалии. Поэтому аномальная доходность имеет значение косвенного доказательства (индикатора), обосновывающего проверку, но сама по себе не устанавливает ни умысла, ни факта доступа к инсайдерской информации; доказательственную

силу она приобретает в совокупности с данными о конкретных сделках и о круге лиц, имевших доступ к информации.

Влияние нелинейности беты на правовую оценку

Ограничение, связанное со спецификацией модели, имеет прямое отношение к предмету настоящей работы. Как показано выше, для акций малой капитализации и стоимостных акций бета не постоянна, а представляет собой U-образную функцию рыночной доходности [7]: восстановленная бета изменяется от 1,206 при нулевой рыночной доходности до 2,240 на границах диапазона ±3 %. Если истинная бета выпукла, а нормальная доходность исчисляется по постоянной бете, оценка оказывается систематически смещенной. Обозначим смещение как разность действительной нормальной доходности h(x) и ее оценки по постоянной бете β_{const} при рыночной доходности x:

$$b(x) = h(x) - \beta_{const} \cdot x \quad (15)$$

Результаты расчета смещения для восстановленной в работе зависимости приведены в таблице 5.

Таблица 5

Смещение оценки нормальной доходности при использовании постоянной беты вместо нелинейной, процентные пункты

Рыночная доходность x, %	Истинная бета β(x)	Смещение b(x), п. п.
0,5	1,380	−0,323
1,0	1,719	−0,506
1,5	1,987	−0,530
2,0	2,137	−0,451
2,5	2,208	−0,319
3,0	2,240	−0,163

Максимальное по модулю смещение составляет 0,536 п. п. и достигается при рыночной доходности около 1,3 %; при реалистичном (с тяжелыми хвостами) распределении дневной рыночной доходности смещение превышает 0,3 п. п. в 56,4 % торговых дней. Принципиально, что это смещение систематическое, а не случайное: оно есть функция рыночной доходности и потому не усредняется при накоплении. Поскольку b(x) нечетная функция, на симметричном рынке смещения частично компенсируются, однако на однонаправленном (трендовом) участке они накапливаются: при устойчивом снижении рынка на 1,5 % в день постоянная бета порождает ложную положительную аномальную доходность около 0,53 п. п. в день, что за десять дней дает ложное накопление CAR порядка +5,3 п. п., а при растущем рынке смещение имеет обратный знак и способно замаскировать действительную аномальную доходность.

Величины такого порядка сопоставимы с предобъявленческой аномальной доходностью, фиксируемой в исследованиях инсайдерской торговли [23, 24]. Следовательно, ошибка спецификации модели нормальной доходности способна как создать видимость инсайдерской торговли там, где ее не было, так и скрыть действительное нарушение, что в правовом контексте означает риск как необоснованного обвинения, так и неверного исчисления излишнего дохода по примечанию 1 к статье 15.21 КоАП РФ [17]. К экспертной методике, применяемой в состязательном процессе, предъявляются требования прозрачности, воспроизводимости и проверяемости, прямо следующие из позиции по делу Halliburton [27]. Компактная аналитическая формула нормальной доходности с замкнутым выражением беты β(x) = h′(x), содержащая три коэффициента, этим требованиям удовлетворяет, она проверяема пересчетом и допускает содержательное истолкование каждого члена, тогда как нейросетевая аппроксимация той же зависимости порядка 45 параметров существенно менее пригодна для судебной проверки. Тем самым применение нелинейной беты в компактной аналитической форме повышает точность контрфактической доходности и, как следствие, надежность как вывода о наличии аномальной доходности, так и исчисления размера излишнего дохода, требуемого нормами [17, 18].

Выводы

Метод воспроизвел основной результат статьи [7], а именно U-образную нелинейную бету портфеля Small: средняя бета 1,875, выпуклость 1,002 компактной формулой из трех чисел $h(x) = 1{,}877 \cdot x - 0{,}481 \cdot \sin(1{,}042 \cdot x)$.

Метод содержит линейную CAPM как частный случай (компактный конец Парето-фронта), что согласуется с логикой работы [7], где линейная модель вкладывается в нелинейную.

Практическая значимость работы с экономической точки зрения заключается в следующем. Инвесторы получают инструмент, упрощающий сценарно-чувствительное управление портфелем. Это позволяет дифференцировать стратегии хеджирования, снижая операционные издержки в спокойных фазах рынка и обеспечивая адекватную защиту капитала в периоды кризисов и резких подъемов. При этом компактность и аналитическая прозрачность результата делают его доступным для использования без специализированного программного обеспечения, что особенно важно для средних и частных инвесторов, ограниченных в вычислительных ресурсах. Предложенный метод, таким образом, не только воспроизводит результаты нейросетевого моделирования, но и предоставляет интерпретируемый и регуляторно-безопасный инструмент для повседневной оценки систематического риска.

С правовой точки зрения предложенный метод предоставляет прозрачный и воспроизводимый инструмент оценки нормальной доходности, необходимой для событийного анализа при выявлении неправомерного использования инсайдерской информации и для исчисления излишнего дохода, предусмотренного статьей 15.21 КоАП РФ и статьей 185.6 УК РФ. Компактность и аналитическая прозрачность формулы, а также замкнутое выражение для беты повышают достоверность такой оценки и ее пригодность для судебной проверки по сравнению с непрозрачными нейросетевыми моделями.

Литература

1. Sharpe W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk // The Journal of Finance. 1964. Vol. 19, № 3. P. 425—442.

2. Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets // The Review of Economics and Statistics. 1965. Vol. 47, № 1. P. 13—37.

3. Mossin J. Equilibrium in a capital asset market // Econometrica. 1966. Vol. 34, № 4. P. 768—783.

4. Markowitz H. Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7, № 1. P. 77—91.

5. Perold A. F. The capital asset pricing model: an overview // Journal of Economic Perspectives. 2004. Vol. 18, № 3. P. 3—24.

6. Jagannathan R., Wang Z. The conditional CAPM and the cross-section of expected returns // The Journal of Finance. 1996. Vol. 51, № 1. P. 3—53.

7. Hou K., Lee J. Nonlinear CAPM beta: working paper. 2018. URL: https://ssrn.com/abstract=3246262 (дата обращения: 17.07.2026).

8. Market cap, explained // FINRA. URL: https://www.finra.org/investors/insights/market-cap (дата обращения: 17.07.2026).

9. Fama E. F., French K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds // Journal of Financial Economics. 1993. Vol. 33, № 1. P. 3—56.

10. Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016. Vol. 113, № 15. P. 3932—3937.

11. Liu Z., Wang Y., Vaidya S. [et al.]. KAN: Kolmogorov—Arnold networks. 2024. arXiv:2404.19756. URL: https://arxiv.org/abs/2404.19756 (дата обращения: 17.07.2026).

12. Nadaraya E. A. On estimating regression // Theory of Probability & Its Applications. 1964. Vol. 9, № 1. P. 141—142.

13. Watson G. S. Smooth regression analysis // Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A. 1964. Vol. 26, № 4. P. 359—372.

14. Koza J. R. Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection. Cambridge, MA: MIT Press, 1992. — 819 p. ISBN 978-0-262-11170-6.

15. Schmidt M., Lipson H. Distilling free-form natural laws from experimental data // Science. 2009. Vol. 324, № 5923. P. 81—85.

16. О противодействии неправомерному использованию инсайдерской информации и манипулированию рынком и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации : федер. закон от 27.07.2010 № 224-ФЗ (в ред. от 08.08.2024) // Собрание законодательства Российской Федерации. 2010. № 31. Ст. 4193.

17. Кодекс Российской Федерации об административных правонарушениях от 30.12.2001 № 195-ФЗ (в ред. от 08.08.2024). Ст. 15.21 // Собрание законодательства Российской Федерации. 2002. № 1 (ч. 1). Ст. 1.

18. Уголовный кодекс Российской Федерации от 13.06.1996 № 63-ФЗ (в ред. от 08.08.2024). Ст. 185.6 // Собрание законодательства Российской Федерации. 1996. № 25. Ст. 2954.

19. Fama E. F., Fisher L., Jensen M. C., Roll R. The adjustment of stock prices to new information // International Economic Review. 1969. Vol. 10, № 1. P. 1—21.

20. Brown S. J., Warner J. B. Using daily stock returns: the case of event studies // Journal of Financial Economics. 1985. Vol. 14, № 1. P. 3—31.

21. MacKinlay A. C. Event studies in economics and finance // Journal of Economic Literature. 1997. Vol. 35, № 1. P. 13—39.

22. Kothari S. P., Warner J. B. Econometrics of event studies // Handbook of Empirical Corporate Finance. Amsterdam : Elsevier, 2007. Vol. 1. P. 3—36.

23. Keown A. J., Pinkerton J. M. Merger announcements and insider trading activity: an empirical investigation // The Journal of Finance. 1981. Vol. 36, № 4. P. 855—869.

24. Meulbroek L. K. An empirical analysis of illegal insider trading // The Journal of Finance. 1992. Vol. 47, № 5. P. 1661—1699.

25. Augustin P., Brenner M., Subrahmanyam M. G. Informed options trading prior to takeover announcements: insider trading? // Management Science. 2019. Vol. 65, № 12. P. 5697—5720.

26. Basic Inc. v. Levinson, 485 U.S. 224 (1988) : решение Верховного суда США. URL: https://supreme.justia.com/cases/federal/us/485/224/ (дата обращения: 17.07.2026).

27. Halliburton Co. v. Erica P. John Fund, Inc., 573 U.S. 258 (2014) : решение Верховного суда США. URL: https://supreme.justia.com/cases/federal/us/573/258/ (дата обращения: 17.07.2026).

28. Dura Pharmaceuticals, Inc. v. Broudo, 544 U.S. 336 (2005) : решение Верховного суда США. URL: https://supreme.justia.com/cases/federal/us/544/336/ (дата обращения: 17.07.2026).

29. Mitchell M. L., Netter J. M. The role of financial economics in securities fraud cases: applications at the Securities and Exchange Commission // The Business Lawyer. 1994. Vol. 49, № 2. P. 545—590.

Abnormal return as an indicator of the illegal use of insider information and the derivation of an analytical form for the nonlinear beta coefficient in the capm model

Ponimash Z.A., Potanina A.R.

Southern Federal University, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration

The paper addresses the nonlinearity of the beta coefficient in the Capital Asset Pricing Model (CAPM). Classical CAPM treats beta as a constant proportionality coefficient, yet the accumulated empirical evidence indicates its dependence on the magnitude of the market return. Building on a study in which the nonlinear beta is estimated by an artificial neural network, we propose a symbolic-regression method that recovers the expected-return function h(x) and its derivative beta β(x) = h′(x) in a compact analytical form. The method combines Nadaraya—Watson kernel smoothing on a uniform grid, a Kolmogorov—Arnold network for the initial approximation, simplification by large language models, and genetic symbolic regression with Pareto-front (accuracy/complexity) selection. On synthetic data reproducing the conditions of the small-capitalization portfolio (Small), the method recovered the U-shaped nonlinear beta with the three-parameter formula $h(x) = 1{,}877x - 0{,}481 \cdot \sin(1{,}042x)$: average beta 1.875 (target 1.859), convexity 1.002 (target 1.032). Compared with polynomials, a neural network, and classical genetic regression (gplearn), the proposed method attains comparable accuracy with the minimal number of parameters while preserving the economic interpretability of the result. The legal application is demonstrated: the recovered normal-return function underpins the event-study detection of the unlawful use of insider information, while the compact analytical form of beta improves the reliability of the counterfactual estimation of illicit gains.

Keywords: CAPM, nonlinear beta, symbolic regression, machine learning, interpretability, beta convexity, formula compactness, small-capitalization portfolio, Nadaraya—Watson regression, risk premium, insider trading, abnormal return, event study, counterfactual gain.

References

1. Sharpe W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk // The Journal of Finance. 1964. Vol. 19, No. 3. P. 425-442.

2. Lintner J. The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets // The Review of Economics and Statistics. 1965. Vol. 47, No. 1. P. 13-37.

3. Mossin J. Equilibrium in a capital asset market // Econometrica. 1966. Vol. 34, No. 4. P. 768-783.

4. Markowitz H. Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7, No. 1. P. 77-91.

5. Perold A. F. The capital asset pricing model: an overview // Journal of Economic Perspectives. 2004. Vol. 18, No. 3. P. 3-24.

6. Jagannathan R., Wang Z. The conditional CAPM and the cross-section of expected returns // The Journal of Finance. 1996. Vol. 51, No. 1. P. 3—53.

7. Hou K., Lee J. Nonlinear CAPM beta: working paper. 2018. URL: https://ssrn.com/abstract=3246262 (access date: 07/17/2026).

8. Market cap, explained // FINRA. URL: https://www.finra.org/investors/insights/market-cap (accessed 07/17/2026).

9. Fama E. F., French K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds // Journal of Financial Economics. 1993. Vol. 33, No. 1. P. 3—56.

10. Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016. Vol. 113, No. 15. P. 3932-3937.

11. Liu Z., Wang Y., Vaidya S. [et al.]. KAN: Kolmogorov—Arnold networks. 2024. arXiv:2404.19756. URL: https://arxiv.org/abs/2404.19756 (access date: 07/17/2026).

12. Nadaraya E. A. On estimating regression // Theory of Probability & Its Applications. 1964. Vol. 9, No. 1. P. 141-142.

13. Watson G. S. Smooth regression analysis // Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A. 1964. Vol. 26, No. 4. P. 359-372.

14. Koza J. R. Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection. Cambridge, MA: MIT Press, 1992. - 819 p. ISBN 978-0-262-11170-6.

15. Schmidt M., Lipson H. Distilling free-form natural laws from experimental data // Science. 2009. Vol. 324, No. 5923. P. 81-85.

16. On Counteracting the Unlawful Use of Insider Information and Market Manipulation and on Amendments to Certain Legislative Acts of the Russian Federation: Federal Law of July 27, 2010 No. 224-FZ (as amended on August 8, 2024) // Collected Legislation of the Russian Federation. 2010. No. 31. Art. 4193.

17. Code of the Russian Federation on Administrative Offenses dated December 30, 2001 No. 195-FZ (as amended on August 8, 2024). Art. 15.21 // Collected Legislation of the Russian Federation. 2002. No. 1 (Part 1). Art. 1.

18. Criminal Code of the Russian Federation of June 13, 1996 No. 63-FZ (as amended on August 8, 2024). Art. 185.6 // Collected Legislation of the Russian Federation. 1996. No. 25. Art. 2954.
19. Fama E. F., Fisher L., Jensen M. C., Roll R. The adjustment of stock prices to new information // International Economic Review. 1969. Vol. 10, No. 1. P. 1–21.
20. Brown S. J., Warner J. B. Using daily stock returns: the case of event studies // Journal of Financial Economics. 1985. Vol. 14, No. 1. P. 3—31.
21. MacKinlay A. C. Event studies in economics and finance // Journal of Economic Literature. 1997. Vol. 35, No. 1. P. 13-39.
22. Kothari S. P., Warner J. B. Econometrics of event studies // Handbook of Empirical Corporate Finance. Amsterdam: Elsevier, 2007. Vol. 1. P. 3-36.
23. Keown A. J., Pinkerton J. M. Merger announcements and insider trading activity: an empirical investigation // The Journal of Finance. 1981. Vol. 36, No. 4. P. 855-869.
24. Meulbroek L. K. An empirical analysis of illegal insider trading // The Journal of Finance. 1992. Vol. 47, No. 5, pp. 1661–1699.
25. Augustin, P., Brenner, M., Subrahmanyam, M. G. “Informed options trading prior to takeover announcements: insider trading?” Management Science. 2019, Vol. 65, No. 12, pp. 5697–5720.
26. Basic Inc. v. Levinson, 485 U.S. 224 (1988): U.S. Supreme Court decision. Available at: https://supreme.justia.com/cases/federal/us/485/224/ (accessed July 17, 2026).
27. Halliburton Co. v. Erica P. John Fund, Inc., 573 U.S. 258 (2014): U.S. Supreme Court decision. URL: https://supreme.justia.com/cases/federal/us/573/258/ (date accessed: July 17, 2026).
28. Dura Pharmaceuticals, Inc. v. Broudo, 544 U.S. 336 (2005): decision of the Supreme Court of the United States. URL: https://supreme.justia.com/cases/federal/us/544/336/ (date accessed: July 17, 2026).
29. Mitchell M. L., Netter J. M. The role of financial economics in securities fraud cases: applications at the Securities and Exchange Commission // The Business Lawyer. 1994. Vol. 49, No. 2. P. 545–590.